Exercice 1

Dans chacun des cas, déterminer la solution de l'équation différentielle satisfaisant la condition initiale proposée.

1. $y' - 5y = 0$ et $y(2) = 4$.
2. $3y' + 2y = 0$ et $y(1) = -2$.
3. $4y' - 7y = 0$ et $y(10) = \frac{3}{4}$.

Exercice 2

Contamination d'eau potable

Un réservoir contient 1 000 litres d'eau potable.
À la suite d'un incident, de l'eau de mer pénètre dans ce réservoir, à raison de 10 litres par minute.
On s'intéresse à la salinité de cette eau, c'est-à-dire à son taux de sel (en gramme par litre). Ce taux dans l'eau potable est de $0{,}12\ \text{g} \cdot \text{L}^{-1}$ et on souhaite qu'il reste inférieur à $3{,}9\ \text{g} \cdot \text{L}^{-1}$.

On modélise la situation en notant C la salinité exprimée en gramme par litre ($\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$) et t le temps écoulé en minute depuis le début de l'incident.
On suppose que l'évolution de la salinité est modélisée par l'équation différentielle (E) $y' + 0{,}01y = 0{,}045$.

1. Quelle est la salinité de l'eau dans le réservoir avant l'incident, c'est-à-dire à $t = 0$?
2. Résoudre l'équation (E) et déterminer la fonction C qui vérifie la condition initiale.
3. a. Justifier que la fonction C est strictement croissante.
b. Déterminer la salinité de l'eau du réservoir 60 minutes après le début de l'incident. Arrondir à 10^{-2} près.
c. Que devient la salinité de l'eau du réservoir si on n'intervient jamais ?
4. La salinité doit rester inférieure à $3{,}9\ \text{g} \cdot \text{L}^{-1}$ pour que l'eau du réservoir reste potable.
De combien de temps le service de surveillance dispose-t-il pour arrêter l'arrivée de l'eau salée afin de limiter l'impact de l'incident ? Justifier la réponse.